# Introdução à Computação II

## BCC - EMA 8597

Prof. Rafael Oliveira[1]

[1]rpaes@icmc.usp.br

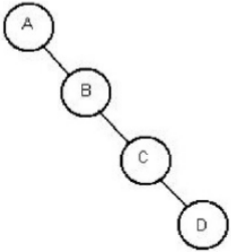
Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”
UNESP
Rio Claro 2012

# Árvores

Árvores

# Árvores

- Por definição, uma sequência, ou lista, pode ser considerada uma árvore na qual cada nó possui apenas uma única subárvore.
- Sendo assim, uma lista pode ser chamada também de árvore degenerada




*ista representada como uma árvore degenerada*

# Árvores

- Na figura é possível observar que cada nó está ligado à somente uma sub-árvore, apresentando um crescimento unilateral
- Por isso dizemos que essa estrutura é uma árvore degenerada.
- Mas, como podemos representar uma árvore?

# Árvores

- Seria como uma árvore propriamente dita, com raiz, ramificações, folhas etc?
- Como uma árvore pode possuir sub-árvores?
- Vamos então começar a estudá-las, partindo do princípio que uma árvore é uma estrutura abstrata e que teremos que representá-la computacionalmente

# Árvores – Representação

- Por meio de um estudo em diversas bibliografias é possível notar que são diversas as formas possíveis de representar uma estrutura de árvore.
- Porém, a forma adotada por unanimidade é aquela que mais se assemelha a uma árvore propriamente dita.
- Vejamos essa representação na figura abaixo

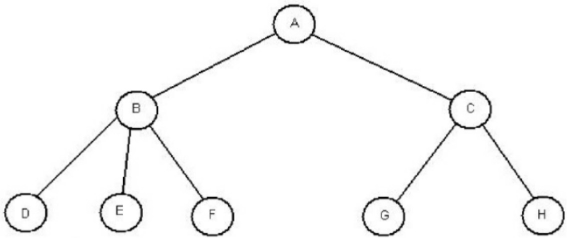



*Figura2 - Representação clássica de uma árvore*

# Árvores – Representação

- Nessa representação, a árvore é uma estrutura hierárquica na qual cada círculo da figura representa um nó
- a partir de cada nó derivam sub-árvores
- Desse modo, explica-se como um nó pode possuir sub-árvores

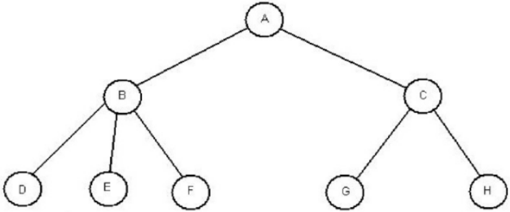



*Figura2 - Representação clássica de uma árvore*

# Árvores – Nó Raiz vs Nó Folha

- Ao nó que se encontra notopo da árvore, denominamos de raiz.
- Note que, comparando com uma árvore no mundo real, essa representação está invertida.
- Sendo assim, o nó raiz é o “A” e os nós folhas são os nós “D”, “E”, “F”, “G” e “H”

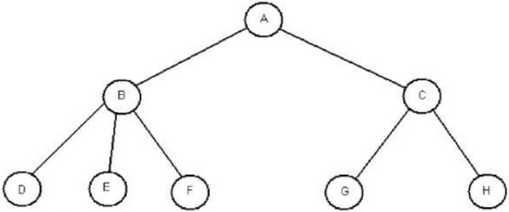



*Figura2 - Representação clássica de uma árvore*

# Árvores – Utilização

- Um exemplo de utilização de árvores para representar umdeterminado problema pode ser apresentado na forma da figura 3.
- Você consegue visualizar para que está sendo utilizada?

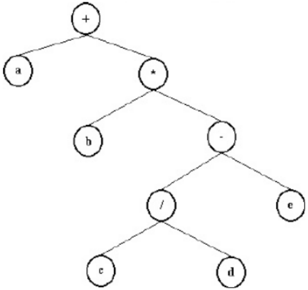



*Figura3 - Representação de expressão aritmética com árvore*

# Árvores – Utilização

- Em linhas gerais, o entendimento é simples
- A figura 3 faz a representação da seguinte expressão aritmética:

```
(a +(b *( (c / d) - e)))
```

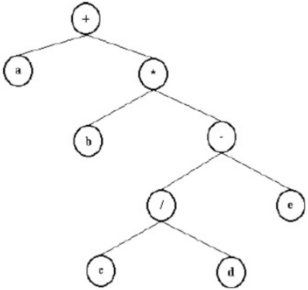



*Figura3 - Representação de expressão aritmética com árvore*

# Árvores – Utilização

- Após essa representação, dizemos que a grande motivação para estudarmos árvores é que diversas aplicações necessitam de estruturas mais complexas que as listas estudadas até agora
- Sendo que, nas árvores, os nós podem definir uma ordenação implícita.
- Além disso, existem algoritmos eficientes para o tratamento de árvores quando comparadas às estruturas mais genéricas, como os grafos.

# Árvores – Definição

- Uma árvore “T” é um conjunto finito de elementosdenominados nós ou vértices tais que:
  - **T** $= 0$ é a árvore dita vazia ou
  - Existe um nó **r**, chamado raiz de **T**; os nós restantes constituem um único conjunto vazio ou são divididos em $m \gneq 1$ conjuntos distintos não vazios quesão as sub-árvores de **r**, cada sub-árvore a qual é, por sua vez, uma árvore

# Árvores – Definição

- Para visualizarmos melhor as próximas definições, vamos considerar a seguinte árvore.

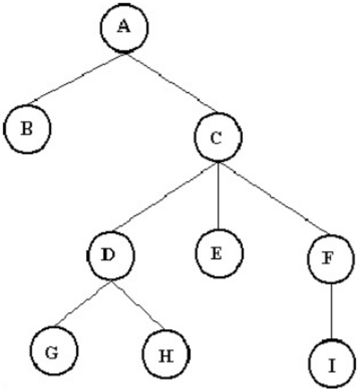



*Figura 4 - Exemplo de árvore*

# Árvores – Definição

- Dizemos que a notação para uma sub-árvore é:
  $Tv$, se $v$ é um nó de $T$
  Assim, $Tv$ indica a sub-árvore de $T$ com raiz em $v$
- Seja do slide anterior, $T$ = {A, B, C, D, E, F, G, H, I}, dizemos que ela possui duas sub-árvores:
  $Tb$ e $Tc$, em que:
  $Tb$ = {B} e
  $Tc$ = {C, D, E, F, G, H, I}

# Árvores – Definição

- Já a sub-árvore *Tc* possui 3 sub-árvores: *Td*, *Te* e *Tf*, em que:
  *Td* = {D, G, H}
  *Te* = {E}
  *Tf* = {F, I}

# Árvores

- Note que as sub-árvores *Tb, Te, Tg, Th e Ti* possuem apenas o nó raiz e nenhuma sub-árvore.
- Vamos ver agora outras definições acerca de árvores, considerando *v* o nó raiz da sub-árvore *Tv* de *T*. Dessa maneira, teremos:

# Árvores - Nós Filhos

- Os nós w1, w2, ... wj raízes das sub-árvores de Tv são chamados filhos de v
- Os nós B e C são filhos de A.
- Assim como, os nós D, E e F são filho de C.

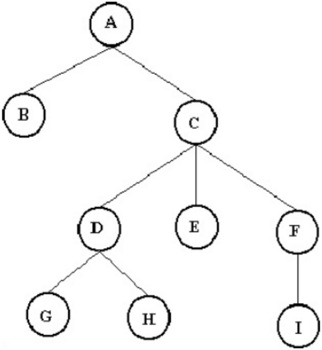



*Figura 4 - Exemplo de árvore*

# Árvores - Pais, tios, irmãos e avô

- O nó v é chamado pai de w1, w2, ... wj. Assim, os nós w1, w2, ... wj são irmãos. E, se z é filho de w1, então w2 é tio de z e v é avô de z
- Conforme a árvore abaixo, teremos que o nó C é pai dos nós D e E e F. Assim, os nós D, E e F são irmãos, o nó A é avô deles e o nó B é tio deles.

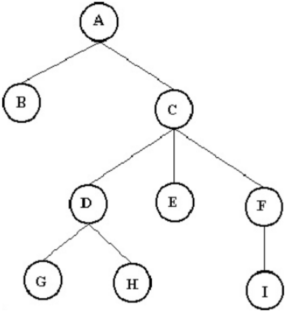



*Figura 4 - Exemplo de árvore*

# Árvores - Nó descendente e ancestral

- Se x pertence à sub-árvore Tv, então, x é descendente de v e v éancestral, ou antecessor, de x.
- Dessa forma, para a representação da árvore, temos que o nó G é descendente do nó D e o mesmo é ancestral do nó G.

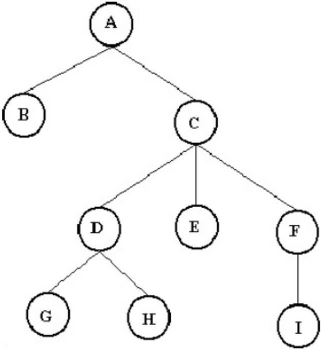



Figura 4 - Exemplo de árvore

# Árvores - Grau de saída

- O grau de saída significa o número de filhos de um determinado nó.
- Tratando-se do exemplo da árvore, temos o seguinte: G(A):2, G(B):0, G(C):3, G(D):2, G(E): 0, G(F): 1, G(G): 0, G(H): 0 e G(I): 0

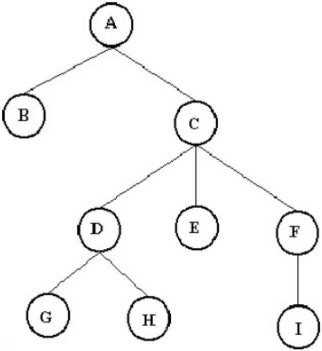



Figura 4 - Exemplo de árvore

# Árvores - Nó folha

- Nó que não possui descendente, ou seja, um nó folha é aquele com graude saída nulo.
- Analisando nossa árvore e os exemplos vistos para grau de saída, podemos afirmar que os nós B, E, G, H e I são nós folhas.

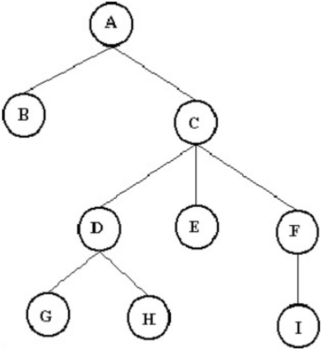



*Figura 4 - Exemplo de árvore*

# Árvores - Nó interior ou interno

- Diferentemente do nó folha, as árvores possuem esse tipo de nó que é aquele que tem um grau de saída diferente de zero.
- Dessa maneira, para o nosso exemplo e sabendo dos graus já apresentados, os nós internos dessa árvore são A, C, D e F.

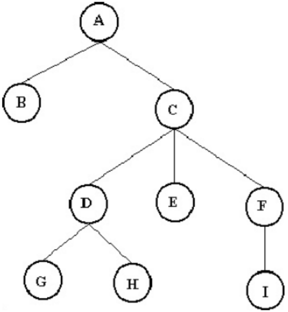



*Figura 4 - Exemplo de árvore*

# Árvores - Grau de uma árvore

- Refere-se ao valor máximo entre os graus de seus nós.
- Logo, podemos dizer que nossa árvore tem grau 3, pois o nó C possui o maior grau que é justamente esse valor.

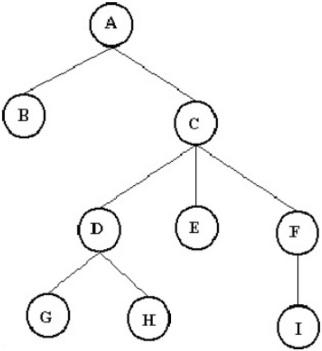



*Figura 4 - Exemplo de árvore*

# Árvores - Floresta

- É um conjunto de zero ou mais árvores disjuntas
- De acordo com as árvores abaixo, temos um exemplo de uma floresta com duas árvores disjuntas

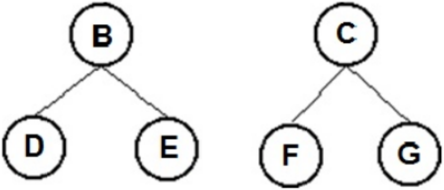



*Figura 5 - Exemplo de floresta com duas árvores*

# Árvores - Caminho na árvore

- Sequência de nós distintos v1, v2, ..., vk, tal que sempre existe a relação "é filho de" ou "é pai de" entre nós consecutivos (isto é, entre v1 e v2, entre v2 e v3, ..., v(k-1) e vk).

# Árvores - Caminho na árvore

- De acordo com a árvore abaixo, podemos traçar, por exemplo, os caminhos:
  - C1: A, C, D, G;
  - C2: A, B;
  - C3: A, C, F, I;
  - C4: A, C, E.

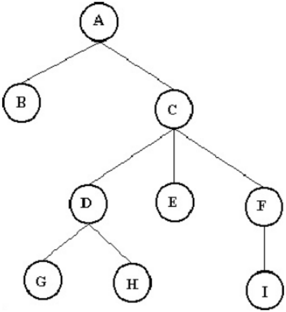



*Figura 4 - Exemplo de árvore*

# Árvores - Comprimento do caminho

- Um caminho que passa por vk vértices é obtido pela sequência de k-1 pares.
- O valor k-1 é o comprimento do caminho.
- Para os caminhos anteriores em árvore teríamos os seguintes comprimentos:
  - C1: 3; C2: 1; C3: 3 e C4: 2.

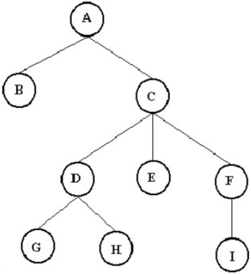



*Figura 4 - Exemplo de árvore*

# Árvores - Nível ou profundidade de um nó

- O nível ou profundidade de um determinado nó é o número de nós do caminho da raiz até o nó
- sendo que a raiz tem nível 0
- Assim, de acordo com nossa árvore, o nó F tem nível 2.

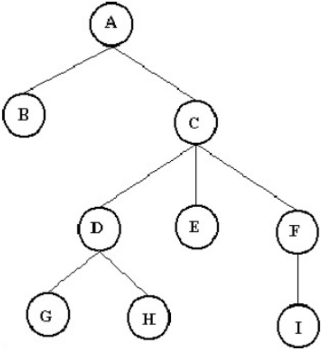



Figura 4 - Exemplo de árvore

# Árvores - Altura de um nó

- A altura de um nó v é determinada pelo número de nós no maior caminho de v até um de seus descendentes
- sendo que as folhas têm altura igual a 1
- Dessa forma, o nó C da árvore apresentada tem altura igual a 3.

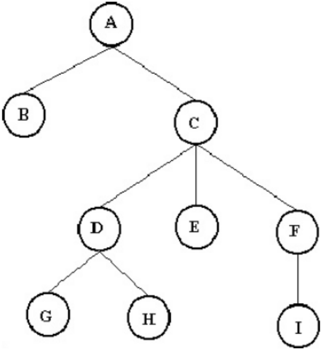



Figura 4 - Exemplo de árvore

# Árvores - Altura de uma árvore

- A altura de uma árvore T, ou h(T), é calculada como sendo o comprimento do caminho mais longo da raiz até uma das folhas.
- Por definição, a altura de uma árvore que possui somente um nó é zero.
- Logo, a altura da árvore apresentada por nós é igual a 4.

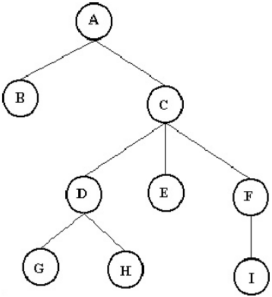



Figura 4 - Exemplo de árvore

# Árvores - Árvore Ordenada

- Uma árvore é dita ordenada quando os filhos de cada nó estão ordenados de acordo com alguma regra.
- Além disso, assume-se que a ordenação é feita da esquerda para a direita. Abaixo são ilustrados exemplos de árvores ordenada e desordenada.

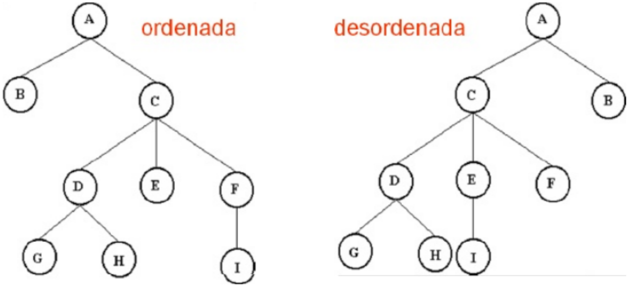



*Figura 6 - Exemplos de árvores ordenada e desordenada*

# Árvores - Árvore Cheia

- Uma árvore de grau z é uma árvore cheia se possui o número máximo denós, isto é, todos os nós têm número máximo de filhos exceto as folhas.
- Além disso, todas as folhas devem estar na mesma altura.
- Abaixo é apresentado um exemplo de árvore cheia de grau 2. Observe que a raiz e os nós internos possuem grau 2 e os nós folhas estão na mesma altura.

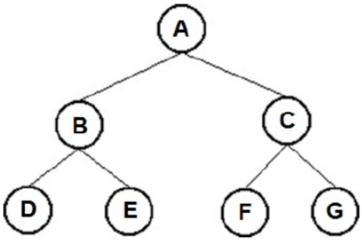
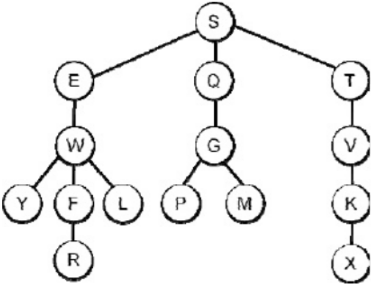



*Figura 6 - Exemplo de árvore cheia*

# Árvores - Solução de Problemas

- Imagine como seria a utilização de uma TAD árvore para a solução de problemas
- Para tanto, é necessário ter os conceitos básicos acerca de árvores bem fixados
- Considere a estrutura de árvore abaixo e responda:

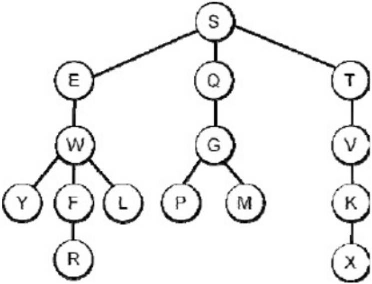


# Exercícios

Caneta e papel na mão para responder as perguntas e fixar os conceitos

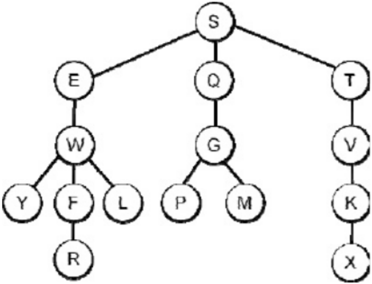
# Exercícios – 01

1. Qual o grau de saída de cada um dos nós?



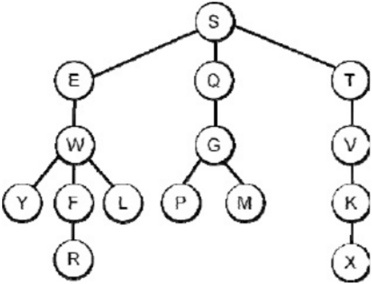
# Exercícios – 02

2 Quais são os nós folha da árvore?



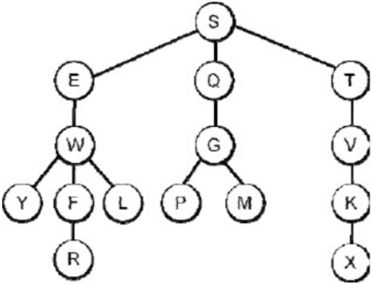
# Exercícios – 03

3 Quais são os nós internos da árvore?



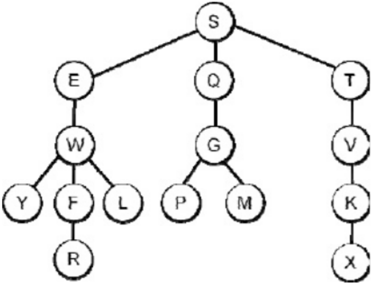
# Exercícios – 04

4 Qual é o grau da árvore?



# Exercícios – 05

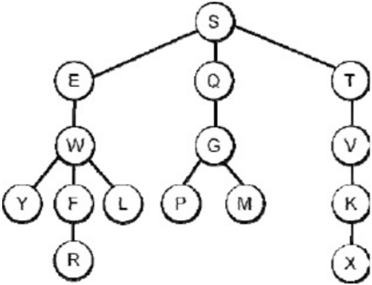
5 Indique dois caminhos de comprimento 4 e dois caminhos de comprimento 5 na árvore?



# Exercícios – 06

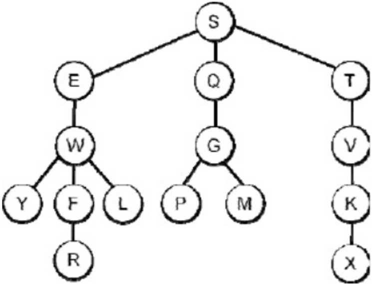
6 Defina o nível ou profundidade dos seguintes nós:

- G
- K
- E
- X



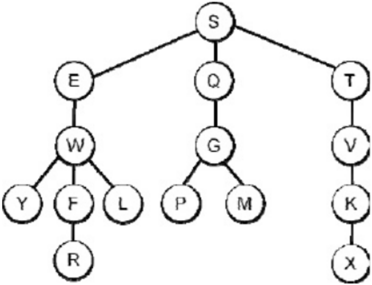
# Exercícios – 07

7 Defina qual a altura dos seguintes nós:
- F
- S
- R
- V



# Exercícios – 08

8 Qual é a altura da árvore em questão?



# Exercícios – 09

9 Redistrua os nós da árvore de modo que ela se torne uma árvore ordenada?